SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE - A. VENNI

UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SINGOLARE IN SPAZI DI BANACH

21 FEBBRAIO 1985

1. INTRODUZIONE

In questo seminario vengono esposti alcuni risultati da noi recentemente ottenuti in [DV] e riguardanti proprietà globali su R^+ delle soluzioni dell'equazione differenziale singolare

$$(1.1) \qquad tu'(t) + Au(t) = f(t) \qquad 0 < t < +\infty$$

dove f, u sono funzioni da R^+ in uno spazio di Banach complesso E e A: $\mathcal{D}(A) \to E$ è un operatore lineare chiuso con $\mathcal{D}(A) \subseteq E$, sul quale verranno fatte opportune ipotesi.

I più recenti contributi allo studio dell'equazione (1.1) sono i lavori di Lewis-Parenti e Coppoletta citati in bibliografia [LP],[C]. In [LP] (dove viene studiata anche la versione non autonoma di (1.1), in un intervallo limitato) E è uno spazio di Hilbert e le ipotesi su A sono simili alle nostre. La tecnica usata si basa sulla trasformazione di Mellin e su un risultato di J.T. Schwartz sui moltiplicatori della trasformazione di Fourier in ambito hilbertiano. In [C] viene studiata l'equazione non autonoma in un intervallo limitato. Le ipotesi sugli operatori A(t) sono di tipo "iperbolico" (nel senso che essi generano semigruppi di classe C_0) e le tecniche sono ispirate alla "parte iperbolica" del lavoro di Da Prato-Grisvard [DPG].

Le nostre tecniche si ispirano alla "parte parabolica" del medesimo lavoro che riproduce essenzialmente idee di Grisvard (v.[G]). Essenzialmente si cerca di invertire (in qualche senso da precisare) l'operatore $u \to tu' + Au$ integrando lungo una curva opportuna i risolventi degli operatori $u \to tu'$ e $u \to Au$. A tale scopo si scrive l'equazione nella forma

(1.2) $(Q - G)u = f$

dove Q e G sono gli operatori definiti da

$\mathcal{D}(Q) = \{ u \in X;\ u(t) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \in R^+,\ t \to Au(t) \text{ appartiene a } X\}$

$(Qu)(t) = Au(t)$

$\mathcal{D}(G) = \{u \in X;\ t \to tu'(t) \text{ appartiene a } X\}$, $(Gu)(t) = -tu'(t)$

Qui X è uno spazio di Banach contenuto in $L^1_{loc}(R^+, E)$, e la derivata è intesa nel senso delle distribuzioni a valori in E.

Poiché le proprietà spettrali di Q (come operatore in X) si deducono da quelle di A (come operatore in E), che verranno precisate in seguito, nel prossimo paragrafo studieremo le proprietà di G. Precisiamo ora quali sono gli spazi $X \subseteq L^1_{loc}(R^+; E)$ che c'interessano.

(a) Spazi "di ordine 0"

(a_1) $L^p(R^+; E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ con la norma usuale

(a_2) i seguenti sottospazi chiusi di $L^\infty(R^+; E)$:

$C(R^+; E)$ (funzioni continue e limitate)

$C(R^+_0; E)$ (funzioni di $C(R^+, E)$ che convergono per $t \to 0^+$)

$C(R^+_\infty; E)$ (funzioni di $C(R^+, E)$ che convergono per $t \to +\infty$)

$C(R^+_{0,\infty}; E) = C(R^+_0, E) \cap C(R^+_\infty, E)$

(b) Spazi di ordine $k \in N$

Sono gli spazi del tipo $\{f \in L_{loc}(R^+; E),\ f^{(j)} \in X \text{ per } 0 \leq j \leq k\}$ dove X è uno spazio di ordine 0. Saranno denotati con $W^{k,p}$ e con C^k

2. L'OPERATORE G ($Gu = -tu'$)

C'interessa studiare le proprietà di G relative a

1) densità di $\mathcal{D}(G)$ in X
2) spettro e risolvente
3) interpolazione tra $\mathcal{D}(G)$ e X

(E' inteso che G si considera come un operatore *in* X e non in $\mathcal{D}'(R^+; E)$).

Lo studio delle proprietà d'interpolazione risulterà utile per ottenere risultati di regolarità delle soluzioni.

Il problema 1) è completamente risolto dal risultato seguente:

Teorema 2.1. $\mathcal{D}(G)$ è denso in X quando

(a) $X = W^{k,p}(R^+; E) \quad k \in N\cup\{0\},\ 1 \leq p < \infty$

(b) $X = C^k(R^+_{0,\infty}; E) \quad k \in N\cup\{0\}$

e non lo è negli altri casi.

Per quanto riguarda 2), $\sigma(G)$ e $R(\lambda;G) = (\lambda I-G)^{-1}$ si calcolano esplicitamente. Poniamo $\alpha = \frac{1}{p}$ (è inteso che per gli spazi C^k, $\alpha = 0$)

Teorema 2.2. Se X è di ordine k e α è come sopra, allora $\sigma(G)$ è la striscia $\{\lambda \in \mathbb{C};\ \alpha-k \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \alpha\}$. Inoltre

(a) per $\operatorname{Re}\lambda > \alpha \quad (R(\lambda;G)f)(t) = t^{-\lambda}\int_0^t \sigma^{\lambda-1} f(s)ds$ e

$\|R(\lambda;G)\| \leq (\operatorname{Re}\lambda - \alpha)^{-1}$

(b) per $\operatorname{Re}\lambda < \alpha-k \ (R(\lambda;G)f)(t) = -t^{-\lambda}\int_t^\infty s^{\lambda-1} f(s)ds$ e

$\|R(\lambda;G)\| \leq (\alpha-k-\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$

Osserviamo che in base al teorema di Hille-Yosida, dal teor. 2.2 segue che quando $\mathcal{D}(G)$ è denso in X, G è il generatore infinitesimale di un gruppo di classe C_0 di operatori lineari continui in X. Tale gruppo è definito da $(\exp(tG)u)(s) = u(s\, e^{-t})$.

Per caratterizzare gli spazi d'interpolazione tra $\mathcal{D}(G)$ e X, supponiamo anzitutto che X sia di ordine 0. Se $X = L^p(R^+; E)$ con $1 \leq p < \infty$ si dimostra che per $0 < \theta < 1$ $(X, \mathcal{D}(G))_{\theta,p}$ è lo spazio delle $f \in X$ tali che $t \to t^\theta f(t)$ sta in $W^{\theta,p}(R^+;E)$ e la norma su $(X,\mathcal{D}(G))_{\theta,p}$ è equivalente a $f \to \left(\int_0^\infty \left(\|f(t)\|^p + \int_0^\infty \frac{\|s^\theta f(s)-t^\theta f(t)\|^p}{|s-t|^{1+\theta p}}\, ds\right) dt\right)^{1/p}$. Se X è $L^\infty(R^+;E)$ o uno spazio C, allora $(X,\mathcal{D}(G))_{\theta,\infty}$ è lo spazio delle $f \in X$ tali che $t \to t^\theta f(t)$ sia hölderiana di esponente θ uniformemente su R^+ (e la norma è quella naturale). In questo caso interessa anche caratterizzare la chiusura di $\mathcal{D}(G)$ in $(X,\mathcal{D}(G))_{\theta,\infty}$: si ottiene che $\overline{\mathcal{D}(G)}^{\theta,\infty}$ coincide con lo spazio delle $f \in (X, \mathcal{D}(G))_{\theta,\infty}$ tali che

$$\lim_{\delta\to 1+} \operatorname*{ess\,sup}_{t,s>0,\ \delta^{-1} < \frac{s}{t} < \delta} \frac{\|s^\theta f(s)-t^\theta f(t)\|}{|s-t|^\theta} < \varepsilon$$

Se poi X_m è uno spazio di ordine $m > 0$ e X_0 è il corrispondente spazio di ordine 0, chiamati G_m e G_0 i relativi operatori, si ha che $(X_m, \mathcal{D}(G_m))_{\theta,p} = \{f \in L^1_{loc}(R^+;E);\ f^{(j)} \in (X_0, \mathcal{D}(G_0))_{\theta,p} \text{ per } 0 \leq j \leq m\}$ e analogamente si caratterizza $\overline{\mathcal{D}(G_m)}^{\theta,\infty}$.

3. L'EQUAZIONE OPERATORIALE $(Q-G)u = f$

Studiamo l'equazione $(Q-G)u = f$ in uno spazio di Banach complesso X, sotto le seguenti ipotesi:

(3.1) Esistono $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $(\beta \leq \alpha)$, $L \geq 1$ $M>1$ tali che la striscia

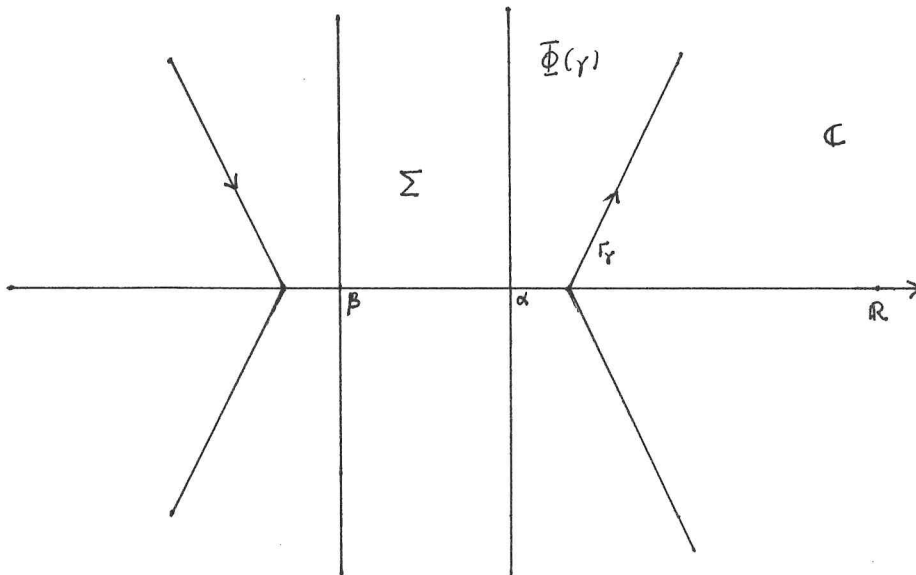
$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \beta \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \alpha\}$ contiene $\sigma(G)$ ed è contenuta in $\rho(Q)$;

inoltre

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Sigma \quad \|R(\lambda;G)\| \leq L(\mathrm{dist}\,(\lambda;\Sigma))^{-1}$$

$$\forall \lambda \in \Sigma \quad \|R(\lambda;Q)\| \leq M(1+|\mathrm{Im}\,\lambda|)^{-1}$$

(3.2) $R(\lambda;G)$ commuta con $R(\mu,Q)$ per $\lambda \in \rho(G)$, $\mu \in \rho(Q)$

In base alle stime usuali sul risolvente, da (3.1) si deduce che

per $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$ l'insieme $\Phi(\gamma) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ \beta-\gamma(1+ |\mathrm{Im}\,\lambda|) < \mathrm{Re}\,\lambda <$ $< \alpha + \gamma(1+ |\mathrm{Im}\,\lambda|)\}$ è contenuto in $\rho(Q)$, e su di esso vale la stima

$$\|R(\lambda;\, Q)\| \leq \frac{C_\gamma}{1+ |\mathrm{Im}\,\lambda|} \quad (\text{con } C_\gamma = \frac{M}{1-\gamma\sqrt{M^2-1}})$$

Chiameremo Γ_γ la frontiera di $\Phi(\gamma)$ orientata "in senso antiorario". Distingueremo tra soluzioni strette e soluzioni forti dell'equazione (1.2) secondo la definizione di [DPG]: u è soluzione stretta di (1.2) se (u,f) appartiene al grafico di Q-G, cioè $u \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(G)$ e $Qu - Gu = f$; u è soluzione forte se (u,f) appartiene alla chiusura del grafico di Q-G. E' chiaro che per evitare patologie, le soluzioni forti saranno interessanti solo quando Q-G è chiudibile.

L'operatore $S = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\gamma} R(\lambda;G)R(\lambda;Q)\,d\lambda$ avrà un ruolo fondamentale. Si prova facilmente che l'integrale converge assolutamente in $\mathcal{L}(X)$ e non dipende da γ. Inoltre:

Teorema 3.1.

(a) $\forall x \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(Q) \qquad S(Q-G)x = x$

(b) $\forall \theta \in\,]0,1[\ \forall p \in [1,\infty]\ \forall x \in (X,\mathcal{D}(G))_{\theta,p} + (X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$

$S\,x \in \mathcal{D}(G) \cap \mathcal{D}(Q)$ e $(Q-G)\,Sx = x$

(c) Q-G è chiudibile e $\forall x \in \mathcal{D}(\overline{Q-G}) \quad S(\overline{Q-G})x = x$.

(d) $\forall y \in \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)} \quad Sy \in \mathcal{D}(\overline{Q-G}) \cap \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)}$ e $(\overline{Q-G})\,Sy = y$

In altre parole, l'equazione (1.2) ha al più una soluzione forte (per (c)); tale soluzione forte esiste $\forall f \in \overline{\mathcal{D}(Q) + \mathcal{D}(G)}$ (per (d)) ed

è stretta $\forall f \in \bigcup_{1\leq p\leq\infty} \bigcup_{0<\theta<1} ((X,\mathcal{D}))_{\theta,p}+(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$ (per (b)).

Si ottiene anche il seguente risultato di regolarità per l'operatore S

<u>Teorema 3.2.</u> Sia $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora GS e QS (v. teor. 3.1 (b)) sono entrambi continui da $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$ in sé, da $(X,\mathcal{D}(G))_{\theta,p}$ in sé, da $\overline{\mathcal{D}(G)}^{\theta,\infty}$ in sé e da $\overline{\mathcal{D}(Q)}^{\theta,\infty}$ in sé.

4. APPLICAZIONE ALL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Torniamo all'operatore $A: \mathcal{D}(A) \to E$. Sia X uno degli spazi elencati al § 1 e $Q: \mathcal{D}(Q) \to X$ l'operatore $(Qu)(t) = A(u(t))$ ivi precisamente definito. E' facile vedere che $\rho(A) \subseteq \rho(Q)$ e $\forall\lambda \in \rho(A)$ $(R(\lambda;Q)u)(t) = (R(\lambda;A))u(t)$ $\forall u \in X$, cosicché $\|R(\lambda;Q)\|_{L(X)} \leq \|R(\lambda;A)\|_{L(E)}$. Pertanto ipotesi su A del tipo che in (3.1) riguardano Q implicano le medesime ipotesi su Q.

Per le ipotesi su G (che qui è l'operatore studiato nel § 2) che appaiono in (3.1), si veda il § 2. Vale anche (3.2) (perché A non dipende da t).

Per applicare compiutamente la "teoria astratta" sviluppata nel § 3 occorre caratterizzare gli spazi $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$. Inoltre sarà interessante sapere quando $\mathcal{D}(G) + \mathcal{D}(Q)$ è denso in X (v. ter. 3.1 (d)). Occupiamoci subito di quest'ultimo problema.

In tutti i casi in cui $\mathcal{D}(G)$ è denso in X (v. teor. 2.1) ovviamente lo è anche $\mathcal{D}(G) + \mathcal{D}(Q)$. Si potrebbe pensare, allora, che se $\mathcal{D}(A)$ è denso in E, $\mathcal{D}(Q)$ sia denso in X. Purtroppo non soltanto ciò è vero solo per quegli stessi spazi per cui $\overline{\mathcal{D}(G)} = X$, ma in base all'esempio 5.9 di

[DV] per gli spazi del tipo $W^{k,\infty}$, $C^k(R^+,E)$, $C^k(R^+_0, E)$ $C^k(R^+_\infty,E)$ nemmeno $\mathcal{D}(G)+\mathcal{D}(Q)$ è denso in X.

Per caratterizzare gli spazi $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p}$ distinguiamo i "casi buoni" ($X = W^{k,p}(R^+; E)$ con $p < \infty$, $X = C^k(R^+_{0,\infty};E)$) da quelli "cattivi" (tutti gli altri). In tutti i casi $\mathcal{D}(Q)$ coincide con lo spazio corrispondente a X, dove al posto di E si deve mettere $\mathcal{D}(A)$ (con la norma del grafico). Se $X = W^{k,p}(R^+; E)$ si ha che $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,p} = W^{k,p}(R^+; (E,\mathcal{D}(A))_{\theta,p})$. Se $X = C^k(R^+_{0,\infty};E)$ si ha che $\overline{\mathcal{D}(Q)}^{\theta,\infty} = C^k(R^+_{0,\infty} ; \overline{\mathcal{D}(A)}^{\theta,\infty})$. Nei casi cattivi tutto ciò che si può dire è che $W^{k,\infty}(R^+; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,\infty})$ è un sottospazio chiuso di $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,\infty}$ (con $X = W^{k,\infty}(R^+, E)$) e che $C^k(I; (E, \mathcal{D}(A))_{\theta,\infty})$ è un sottospazio chiuso di $(X,\mathcal{D}(Q))_{\theta,\infty}$ con $I \in \{R^+, R^+_0, R^+_\infty\}$ e $X = C^k(I, E)$.

Applicando il teor. 3.1 si ottengono i seguenti risultati, dove

$$\Sigma_{k,p} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{p} - k \leq \text{Re}\,\lambda \leq \frac{1}{p}\},\ 1 \leq p \leq \infty,\ k\in N \cup \{0\}$$

<u>Teorema 4.1.</u> Supponiamo che $\Sigma_{k,p} \subseteq \rho(A)$ (per certi $k\in N\cup\{0\}$, $p\in [1,\infty[$) e che su $\Sigma_{k,p}$ $\|R(\lambda;A)\| \leq M(1+ |\text{Im}\,\lambda|)^{-1}$ (con $M > 1$).

Allora:

(a) $\forall f \in W^{k,p}(R^+;E)$ l'equazione (1.1) ha un'unica soluzione forte in $W^{k,p}(R^+;E)$

(b) Se $f \in W^{k,p}(R^+; E)$ ed $\exists\, \theta\in]0,1[$ tale che $t \to t^\theta f^{(j)}(t)$ $(0 \leq j \leq k)$ sta in $W^{\theta,p}(R^+;E)$, allora la soluzione è stretta e la medesima regolarità di f hanno le funzioni tu' e Au

(c) Se $f \in W^{k,p}(R^+; (E,\mathcal{D}(A))_{\theta,p})$ per qualche $\theta \in]0,1[$, allora la soluzione è stretta e la medesima regolarità di f hanno tu' e Au.

<u>Teorema 4.2.</u> Sia $\Sigma_{k,\infty} \subseteq \rho(A)$ (per un certo $k \in N \setminus \{0\}$ e su $\Sigma_{k,\infty}$ si abbia $\|R(\lambda; A)\| \leq M(1+ |\mathrm{Im}\, \lambda|)^{-1}$. Allora:

(a) $f \in C^k(R^+_{0,\infty};E)$ l'equazione (1.1) ha un'unica soluzione forte in $C^k(R^+_{0,\infty};E)$

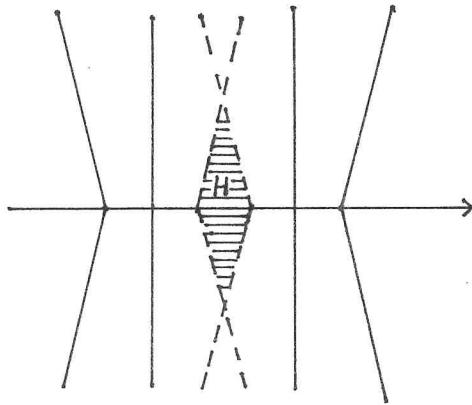
(b) Se $f \in C^k(R^+_{0,\infty};E)$ ed $\exists\, \theta \in \,]0,1[$ tale che per $0 \leq j \leq k$ $t \to t^\theta f^{(j)}(t)$ è uniformemente Hölderiana di esponente θ su R^+, allora la soluzione è stretta, e tu', Au hanno la stessa regolarità di f.
Se poi per $0 \leq j \leq k$

$$\lim_{\delta \to 1+} \sup_{\delta^{-1} \leq \frac{s}{t} \leq \delta} \frac{\|t^\theta f^{(j)}(t) - s^\theta f^{(j)}(s)\|_E}{|s-t|^\theta} = 0$$

allora tu' e Au hanno la medesima regolarità

(c) Se $f \in C^k(R^+_{0,\infty}; \overline{\mathcal{D}(A)}^{\,\theta,\infty})$, allora la soluzione è stretta e allo stesso spazio appartengono le funzioni tu' e Au.

Risultati un po' meno eleganti si ottengono nei "casi cattivi", applicando i teoremi 3.1 e 3.2.

Per concludere vediamo cosa succede se, invece di supporre $\Sigma_{k,p} \subseteq \rho(A)$ supponiamo soltanto $\partial\Sigma_{k,p} \subseteq \rho(A)$, oltre alla decrescenza del risolvente. Allora si vede facilmente che in realtà $\Sigma_{k,p} \setminus \rho(A) = H$ è compatto e che la stima sul risolvente vale in $\Sigma_{k,p}$ per $|\mathrm{Im}\, \lambda| \to +\infty$.

Mediante un integrale di Dunford attorno a H si scompone E nella somma diretta di due sottospazi chiusi E_1 ed E_2 tali che su E_1 l'operatore A gode delle proprietà sotto le quali si è appena studiata l'equazione, mentre su E_2 A é un operatore limitato, con $\sigma(A) = H$. E' chiaro che ci si riduce allora a studiare (1.1) sotto l'ipotesi $A \in L(E)$. In tal caso è ovvio che ogni soluzione di (1.1) è stretta, e se $f \in L^p(R^+; E)$ si prova che l'unica soluzione in $L^p(R^+; E)$ è

$$u(t) = -t^{-A} \int_t^\infty s^{A-1} f(s)\, ds$$

(ricordiamo che in ogni caso $\frac{1}{p} - k < \min_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re} \lambda < \frac{1}{p}$).

Se poi $f \in W^{k,p}(R^+;E)$ si dimostra che la soluzione sopra scritta sta in $W^{k,p}(R^+;E)$ se e solo se vale una certa complicata condizione di compatibilità su f, la quale, in casi particolarmente favorevoli (p. es. f = 0 in un intorno di $+\infty$) si riduce a

$$\int_0^\infty s^{A+k-1} f^{(k)}(s)ds = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

[C] G.COPPOLETTA: Abstract Singular Evolution Equations of "Hyperbolic" Type. JFA 50 (1983), 50-66.

[DPG] G. DA PRATO, P. GRISVARD: Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles. JMPA 54 (1975), 305-387.

[DV] G. DORE, A.VENNI: On a Singular Evolution Equation in Banach Spaces. JFA 64 (1985), 227-250.

[G] P. GRISVARD: Equations différentielles abstraites. Ann.Sci. ENS (4) 2 (1969), 311-395.

[LP] J.E. LEWIS, C. PARENTI: Abstract Singular Parabolic Equations. Comm. PDE 7 (1982), 279-324.